Mathematische Modellierung bei Platon zwischen Thales und Euklid

Claas Lattmann

Wissenschaftliche Mathematik ist eine der wichtigsten Kulturleistungen des antiken Griechenland. Doch wann und wo genau hatte sie ihren Ursprung? Die Einschätzung der Antike, zwischen Thales und Euklid habe Platon eine maßgebliche Rolle gespielt, gilt als Fiktion. Die Studie „Mathematische Modellierung bei Platon zwischen Thales und Euklid" (*STMAC* 9, Berlin / Boston: De Gruyter, erscheint voraussichtlich Januar 2019) wirft einen neuen, modelltheoretischen Blick auf die Zeugnisse und erweist im Gegenteil, dass in der Tat Platon als Schöpfer von axiomatisch-deduktiver Mathematik und allgemein Wissenschaft gelten muss.

Die Studie nimmt in Kap. 1.1 ihren Ausgang von der Beobachtung, dass die klassische, in Euklids *Elementen* fassbare wissenschaftlich-theoretische, axiomatisch-deduktive verfasste Mathematik zwar einen immensen, kaum zu überschätzenden Einfluss auf die moderne Zivilisation ausgeübt hat, dass aber die genauen Umstände der Herausbildung dieser spezifischen Form von Mathematik trotz intensiver Debatte noch immer im Dunkeln liegen. Als Hauptursache wird identifiziert, dass zwar zahlreiche Zeugnisse zur frühen Mathematik vorliegen, diese aber fast alle aus der Perspektive der späteren Mathematik euklidischen Typs verfasst sind. Entsprechend zeigt sich nur ein quantitativer, kein qualitativer Unterschied zwischen früher und klassischer griechischer Mathematik. So geben diese Zeugnisse keine Antwort auf die Frage, wann und wie sich die klassische griechische Mathematik herausgebildet hat.

Als Ausweg schlägt Kap. 1.2 vor, die umfangreichen Zeugnisse zur Mathematik zu nutzen, die sich bei Platon finden. Zwar gilt Platon gemeinhin nicht als Mathematiker. Doch ist unstrittig, dass Platon ein umfassendes Interesse an Mathematik zeigt und ein Autor ist, dessen Wirken in die Zeit vor Euklid fällt. In der Tat ist mit Platon der Zugriff auf das überhaupt früheste authentische Material eines mit der Fachmathematik verbundenen Autors möglich. Insofern aber Platons Mathematik schon oft im Fokus der Forschung gestanden hat, werden material- und wissenschaftsbezogene Gründe identifiziert, die eine zielführende Nutzung des Materials – und das Verständnis von Platons Beziehung zur Mathematik insgesamt – erschwert haben.

Kap. 1.3 entwickelt den Vorschlag, das Material aus einem neuen Blickwinkel zu untersuchen. Gefragt werden soll nicht nach dem konkreten Inhalt von Platons mathematischem Wissen – also dem *Was* –, sondern nach der mathematischen Praxis und ihrem Zweck – also dem *Wie* und *Wozu*. Als geeignetes Hilfsmittel wird eine (mit B. Kralemann) eigens entwickelte semiotische Modelltheorie im Rahmen von Charles S. Peirce' Zeichentheorie identifiziert.

Als Grundlage der Analyse expliziert Kap. 2 den modelltheoretischen Ansatz. Modelle werden bestimmt als *icons* und also Zeichen, die ihr Objekt aufgrund einer Ähnlichkeitsrelation in Bezug auf Qualität repräsentieren. Mit *images*, *diagrams* und *metaphors* werden drei Formen von Modell unterschieden, die sich durch die Qualität der relevanten Qualität unterscheiden.

Diese Einsicht wird in Kap. 3 dazu genutzt, ein sicheres Verständnis davon zu erarbeiten, wie sich Modellierung in der griechischen Mathematik manifestiert. Ausgehend davon, dass jeder mathematische Beweis bei Euklid ein Diagramm enthält, wird in Kap. 3.2 durch die Analyse der ersten Proposition in Euklids *Elementen* gezeigt, dass das antike mathematische Diagramm ein *diagram* im Sinn von Peirce (und also Modell) ist; und dass jeder Beweis aus den Bestandteilen Modellgenerierung und -analyse besteht. Die Analyse dreier weiterer Fallbeispiele zeigt in Kap. 3.3, dass die an einem ‚Problem' gewonnenen Einsichten auch für ‚Theoreme‘ gelten. Insofern dies die zwei Grundformen der euklidischen Proposition sind, erweist sich das Diagramm als unabdingbar für den mathematischen Beweis in der klassischen griechischen Mathematik. Daraus, dass zwei der Fallbeispiele von Autolykos von Pitane stammen, folgt weiter, dass die modellbasierte Methodik spätestens in der zweiten Hälfte des 4. Jhs. v. Chr. Anwendung fand, also bereits vor Euklid. Die Mathematik euklidischen Typs geht also nicht ursprünglich auf Euklid zurück.

Schließlich wird in Kap. 3.4 gezeigt, dass die Diagramme in der Mathematik euklidischen Typs universeller Natur sind; sie konstituieren sich aus qualitativ-quantitativen und nicht numerisch-exakten Relationen und sind wahrheitsfähig determinierbar. Insgesamt erweist sich mathematische Modellierung als der zentrale Kern der Methodik der griechischen Mathematik, noch vor der als charakteristisch geltenden axiomatisch-deduktiven Verfasstheit.

Ausgehend hiervon wird in Kap. 4 das Diagramm zur Verdopplung des Quadrats im *Menon* in seiner konkreten Form erschlossen, das erste authentisch (wenn auch literarisch als Beschreibung) überlieferte Diagramm der griechischen Mathematik aus erster Hand überhaupt. In drei Schritten, die den philosophischen Argumentationsstufen ‚falsche Meinung‘ (Kap. 4.2), ‚Aporie‘ (Kap. 4.3) und ‚wahre Meinung‘ (Kap. 4.4) folgen, wird das Diagramm aus dem Text heraus rekonstruiert. Dabei zeigt sich im Dialog (*mutatis mutandis*) die spezifische Struktur des fachmathematischen Beweises; und dass das erzeugte Diagramm derjenigen Form von Diagramm entspricht, die in der Fachmathematik euklidischen Typs Verwendung findet. Im Ergebnis wird Platon aufgrund positiver Evidenz aus erster Hand als der erste fassbare Vertreter einer ‚euklidischen‘ Methode der griechischen Mathematik identifiziert.

In Hinsicht auf die zugrundeliegende Fragestellung ist dieses Ergebnis *prima vista* negativ, impliziert es doch, dass die Untersuchung von Platons Mathematik keinen Einblick in die (konzeptuell) *vor*-euklidische Mathematik erhoffen lässt. Ein solches Urteil erweist sich jedoch als vorschnell und irreführend: In der *Menon*-Passage zeigen sich Reflexe einer früheren Form von Mathematik; diese operiert zwar ebenso mit Diagrammen, doch basieren sie auf partikularen Relationen und werden nicht zur Erforschung universaler Eigenschaften mathematischer Objekte an sich genutzt. Kap. 4.6 rekonstruiert anhand der *Theaitetos*-Stelle zur Inkommensurabilität das Bild einer solchen Mathematik. Unter Einschluss relevanter Zeugnisse zu anderen ‚Mathematikern‘ wie Demokrit und Meton (und Sokrates?) zeigt sich, dass ‚Geometrie‘ zu diesem frühen Zeitpunkt wohl tatsächlich noch die ‚Kunst der Landvermessung‘ war.

Hierauf aufbauend erschließt Kap. 5 die historische Tiefendimension der methodischen Praxis der griechischen Mathematik in einem dezidiert theoretischen Rahmen anhand der Analyse der Versuche der Lösung der Würfelverdoppelung (‚Delisches Problem‘), speziell in Hinblick auf die Platon zugesprochene wissenschaftsorganisatorische Funktion und die in diesem Kontext bezeugten methodologischen Debatten. Ein erster Schritt arbeitet in Kap. 5.2 die Geschichte der Beschäftigung mit dem mathematischen Problem mit Blick auf die Akademie auf, auch anhand archäologischer und historischer Zeugnisse. Dies erbringt das Ergebnis, dass die Anekdoten historisch zuverlässig sind; und dass sich die Beschäftigung mit der Würfelverdopplung eng auf die 350er Jahre v. Chr. datieren lässt. Es folgt, dass alle bekannten frühen Lösungen des Problems in diesen Zeitraum zu datieren sind; dass die Geometrie des Dreidimensionalen nicht weit entwickelt war; und dass die Akademie in der Tat eine wichtige wissenschaftsorganisatorische Funktion hatte. Kap. 5.3 wendet sich der für Platon überlieferten eigenen Lösung und den in diesem Kontext bezeugten methodologischen Diskussionen mit Archytas, Eudoxos und Menaichmos zu, mit dem Ergebnis, dass die Zuweisung der überlieferten Lösung an Platon glaubhaft ist, wenn auch nur als intendiert heuristisches Instrument zum Finden einer vollgültigen Lösung; und dass die Platon zugeschriebene Zurückweisung mechanischer Lösungen im Kontext der Differenz zwischen einer von Platon propagierten theoretischen Mathematik euklidischen Typs und der mit partikularen empirischen Gegenständen beschäftigten praktisch-traditionellen bzw. pythagoreischen Form von Mathematik stand.

Diese Deutung bestätigt Kap. 5.5 mit einer Diskussion der Äußerungen zu Astronomie und musikalischer Harmonielehre in *Politeia* VII in kontrastivem Vergleich mit den frühen fachwissenschaftlichen Zeugnissen: Erstens wird erwiesen, dass auch hier der mathematische Gegenstand für Platon das universale, qualitativ-quantitativ quantifizierte mathematische Objekt und in den kritisierten Formen der Mathematik das partikulare, numerisch-exakt quantifizierte Objekt ist. Zweitens wird gezeigt, dass sich Platon gegen eine traditionelle Form von ‚Sternenkunde' wendet, auch in ihrer numerisch-quantifizierten Form, wie sie bei Meton, Euktemon, Oinopides oder Eudoxos begegnet. Speziell ein Vergleich der Zeugnisse zu den zwei Fassungen derselben von Eudoxos verfassten Schrift *Enoptron* bzw. *Phainomena* erbringt die Einsicht, dass sogar noch Eudoxos anfangs dieser Tradition zuzurechnen ist und erst unter Platons Einfluss eine in euklidischem Sinn mathematisierte Astronomie zu betreiben begann, und zwar um die 350er Jahre v. Chr. Ähnliches zeigt sich für die mathematische Harmonielehre.

Während Kap. 4 und 5 den Fokus auf Platons *praktische* Modellierungstätigkeit legen, wirft Kap. 6 einen Blick auf Platons *Theorie* der mathematischen Modellierung, konkret anhand des Liniengleichnisses. Dieses mathematische Modell wird als Ausdruck von Platons ontologischer und epistemologischer Position dazu genutzt, eine theoretische Bestimmung der Praxis mathematischer Modellierung und mithin des essentiellen Kerns von Mathematik vorzunehmen.

Ein erster Schritt arbeitet in Kap. 6.2 die Problematik des Gleichnisses heraus und identifiziert die Längengleichheit der zwei mittleren Segmente als Stein des Anstoßes. Als Grundlage einer neuen Perspektive wird in Kap. 6.3 dessen direkter Kontext modelltheoretisch erschlossen, das heißt Sonnen- und Höhlengleichnis: Kohärenter Kern der Gleichnisse ist eine Unterteilung der Welt in vier kategorial getrennte Gegenstandsklassen (Formen; Mathematika; physikalische Gegenstände; von ihnen ausgehende Wahrnehmungsinhalte); diese bilden ein Geflecht von Original-Abbild- und mithin ikonischen Modellrelationen. Dies führt in Kap. 6.4 zu einer neuen Sicht auf das Liniengleichnis, mit dem Ergebnis, dass die Längengleichheit der mittleren Segmente den gleichen (abstrakt-) numerischen Umfang der Gegenstandsklassen ausdrückt, und zwar so, dass mathematische und physikalische Gegenstände als in einem 1:1-Verhältnis aufeinander abgebildete intelligible bzw. körperliche Repräsentationen der Formen mittels des Modells der Linie aufgezeigt werden. Kap. 6.5 ergründet die philosophische Pointe dieser quantitativen Gleichsetzung der zwei Objektklassen. Eine kontrastive Diskussion von Mathematik und ‚Dialektik' zeigt den Nutzen mathematischer Modelle: Nur sie ermöglichen, aus der Höhle zum Intelligiblen zu entkommen, und zwar im Ausgang von der Sinneswahrnehmung. Der Nutzen wird durch die Linie selbst vor Augen geführt, die inmitten von Sonnen- und Höhlengleichnis als mathematisches Modell den Aufstieg im Ausgang von der physikalischen ‚Sonne' repräsentiert und den Abstieg in die mit dem Höhlengleichnis bildlich gezeigte ‚Höhle' vorbereitet. Der Hypothesis-Begriff im Liniengleichnis (und in der zweiten mathematischen *Menon*-Stelle) wird dabei als ‚Setzung' (Modellierung) eines Diagrammes expliziert. Dies erlaubt die Bestimmung des Programms der ‚Rettung der Phänomene' als auf Platon zurückgehend; jede andere mathematiktheoretische Position war damit inkompatibel.

Abschließend wirft Kap. 6.7 einen Blick auf das Bildungsprogramm in *Politeia* VII mit der prominenten Bedeutung der Mathematik. Diese Analyse beantwortet die Frage, wie genau Befreiung und Aufstieg aus der Höhle mittels Mathematik gelingen kann. Im Zuge dessen zeigen sich relevante Einsichten zu verschiedenen Auffassungen zur Nützlichkeit von Mathematik zu Platons Zeit, speziell bei Isokrates und in der noch konservativeren traditionellen Sicht.

Das letzte Kap. 7 untersucht die Modellierung der physikalischen Welt in Platons *Timaios* und erweist sie als praktische Anwendung der in *Politeia* VI–VII explizierten Theorie der mathematischen Modellierung. Ein erster Schritt wirft in Kap. 7.2 den Blick auf Platons Lehre von den Elementen, aus denen alles Körperliche besteht. Dabei zeigt sich, dass das avisierte Forschungsprogramm im Grundsatz darin besteht, im Ausgang von der Wahrnehmung mathematische Modelle zu postulieren, deren relationale Eigenschaften eine hinreichende Ursache für die Eigenschaften der die Wahrnehmung durch ihre Interaktion generierenden physikalischen Körper geben. Die relationalen Eigenschaften des mathematischen Modells sind qualitativ-quantitativer Natur mit einem der Mathematik euklidischen Typs entsprechenden Parameterraum; sie manifestieren sich in diagrammatischen Strukturen, die sich physikalisch als körperliche Interaktion realisieren. So wird die Dynamik der (‚werdenden') körperlichen Welt auf die statische Struktur des (‚seienden') mathematischen Diagramms zurückgeführt. Der Einbezug der Wahrnehmung unterscheidet Platons Theorie von Demokrits Atomlehre.

Ausgehend vom physikalischen Charakter der Wahrnehmung als eines Interaktionsprozesses werden in Kap. 7.3 ihre Funktion und Bedeutung beleuchtet. Sie wird als unabdingbarer Bestandteil von Platons physikalischer Theorie erwiesen, nämlich zur Bestimmung der Eigenschaften der physikalischen Körper. Eine Untersuchung der Wahrnehmungsmodi zeigt zweierlei: im Bereich des Hörens, dass mathematisch fundierte physikalische Theorie genuin platonisch war; im Bereich des Sehens, dass Körper über Wahrnehmung partiell zugänglich sind, nämlich in ihrer körperlichen Bewegung. Transparent wird, warum Platon das Sehen als den Anfang von Wissenschaft und Philosophie bestimmt – aber eben doch nur als Anfang: Um zum Guten und zugleich zum göttlichen Leben zu gelangen, muss eine umfassende mathematische Beschreibung der Welt geleistet werden. Mathematische Modellierung des Physikalischen ist notwendige und hinreichende Grundlage für ‚Dialektik', das heißt platonische Philosophie.

In Kap. 7.5 zeigt eine Rückschau auf *Politeia* VI–VII, dass das Bildungsprogramm selbstreflexiv-mimetisch im linearen Vollzug der literarischen Darstellung direkt praktisch-modellhaft gespiegelt ist: Die literarische Präsentation führt in einer metaphorischen, dem Bildungsprogramm (= der platonischen Philosophie) gleichenden Reise von ‚Sonne' über ‚Linie' zum ‚Guten' (= Ende *Politeia* VI) und wieder zurück in die ‚Höhle' mit einer im Bild gewonnenen Erkenntnis zur *condicio humana*, gefolgt vom praktischen Durchgang durch diejenige Bildung, die den Aufstieg fest institutionalisiert, nämlich Mathematik euklidischen Typs, und zwar in allen Dimensionen des Physikalischen. Die Erkenntnis der mimetischen, sich in einem komplexen und mehrschichtig-verschachtelten Geflecht von metaphorischen, diagrammatischen und bildlichen Modellen vollziehenden Konvergenz von semantischem Inhalt und praktischer Demonstration liefert eine Bestätigung der in der Studie explizierten Deutung insgesamt.

Aus systematischer Perspektive erbringt die Studie Erkenntnisse in vier Dimensionen:

(1) *Wissenschaftsphilosophisch:* Die von B. Kralemann und mir entwickelte Modelltheorie wurde einer praktischen Prüfung unterzogen. Sie hat sich als adäquat erwiesen, das Material in seinem Modellcharakter praktisch und theoretisch zu erschließen, mit Gewinn auch in Hinblick auf die gegenwärtige intensive Debatte zum Modell in der Wissenschaftsphilosophie.

(2) *Literarhistorisch:* (a) Zentrale Passagen des platonischen Werkes wurden adäquater erschlossen, darunter das Liniengleichnis und die mathematischen Passagen im *Menon* und im *Theaitetos*. Das wichtigste Resultat ist, dass *Politeia* VI–VII mimetisch den explizierten Inhalt abbildet. Diese Erkenntnis sichert die erarbeitete Interpretation und mahnt, dass bei Platon

das textliche Verständnis Hand in Hand mit einer Erschließung des philosophischen und mathematischen Inhalts gehen muss (und *vice versa*). (b) Es haben sich Einsichten zu Einzelaspekten ergeben, darunter zur Datierung platonischer Dialoge (*Menon*, *Theaitetos* und *Politeia*) und zur Fiktionalisierung der Gesprächssituation im *Theaitetos*. Außerdem wurden Erkenntnisse zu anderen Autoren und Schriften gewonnen, nicht zuletzt zu Eratosthenes' *Platonikos* und Eudoxos' *Enoptron* / *Phainomena*; sowie zu Euklid und Autolykos. Insgesamt hat sich ein sichererer Verstehensrahmen für die mathematischen Passagen in Platons Werk ergeben.

(3) *Philosophiehistorisch:* Mit Platons mathematischer Modellierung wurde ein zentraler Aspekt der Philosophie Platons besser erschlossen und die ontologische und epistemologische Position Platons genauer als zuvor bestimmt. Die Erkenntnisse betreffen zum einen Existenz, Zwischenstellung, Funktion und Bedeutung der Gegenstände der Mathematik. Mathematik euklidischen Typs wurde als integraler Bestandteil platonischer Philosophie erwiesen, ebenso wie gezeigt wurde, dass Platon sie sachgemäß nutzte, wenn auch zu einem höheren Zweck. Diese Einsicht hat Konsequenzen für das Verständnis von Platons ‚ungeschriebener' Lehre.

(4) *Wissenschaftshistorisch:* Die fachmathematischen Praktiken und methodologischen Diskussionen der ersten Hälfte des 4. Jhs. v. Chr. sind greifbarer geworden, und zwar auf der Grundlage authentischen Materials aus erster Hand. Es wurde ein klares Bild von denjenigen Prozessen gewonnen, die zur Ausbildung der Mathematik euklidischen Typs geführt haben:

(a) Platon wurde positiv gesichert als Vertreter der Mathematik euklidischen Typs erwiesen; eine solche Mathematik ist andererseits durch authentisches Material aus erster Hand außerhalb und vor Platon für keinen einzigen ‚Mathematiker' bezeugt. Dennoch lassen sich verschiedene Traditionen von Mathematik vor und neben Platon ausmachen; sie weisen aber gerade nicht die Charakteristika der ‚euklidischen' (= platonischen) Form von Mathematik auf.

(b) Eine Reform der Mathematik im euklidischen Sinn ist positiv gesichert erst für Platon festzustellen, angesichts von Eudoxos' *Enoptron* / *Phainomena* datierbar auf die 360er / 350er Jahre v. Chr. Frühere ‚Elemente' waren wohl ‚mathematische' Handbücher als Sammlung einzelner ‚Sätze', die sich jedoch nicht dem Auffinden universeller mathematischer Erkenntnis widmeten. Die Gattung der ‚Elemente' hätte sich dann später radikal gewandelt; unter der Decke äußerlicher Kontinuität vollzog sich ein revolutionärer Paradigmenwechsel. Der Wandel basiert auch auf der ontologischen Einführung eines intelligiblen Bereichs durch Platon.

(c) Hieraus folgt die Einsicht, dass in der fassbaren Geschichte der frühen griechischen Mathematik allein für Platon ein Grund dafür benannt werden kann, Mathematik euklidischen Typs betreiben zu wollen. Zum einen leistete sie einen substantiellen Beitrag zur Erkenntnis und war das Instrument zur Befreiung aus der Höhle. Zum anderen stellt sich die Frage, wer außer Platon (und denjenigen Mathematikern, für die dies aufgrund positiver Evidenz ausgeschlossen werden konnte) denn überhaupt eine solche Mathematik hätte gutheißen können: Wer hätte eine seit Jahrhunderten praktizierte, ‚kunst'-fertig gewordene Mathematik, die die physikalische Welt exakt numerisch und mit praktischem Nutzen vermessen ließ, für eine Mathematik eintauschen wollen, die aufgrund ihrer methodologischen Verfasstheit nichts als wahre Beweise lieferte, und zwar von allgemeinen Aussagen zu abstrakten Objekten?

Im Ergebnis muss die Erfindung der Mathematik euklidischen Typs Platon zugesprochen werden. Sie ist auf die 360er / 350er Jahre v. Chr. zu datieren. Nur diese Deutung ist mit den nicht nur bei und zu Platon, sondern auch für die anderen Autoren seiner und der ihm vorangehenden Zeit gegebenen Zeugnissen kompatibel. Das Fehlen direkter, nicht von der späteren Mathematikgeschichtsschreibung euklidisch überformter Zeugnisse für eine vor- und außerplatonische Mathematik euklidischen Typs ist Reflex der historischen Entwicklung selbst.